Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB1
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 4 : Fonctions dérivables

Le but de ce chapitre est d'approfondir la notion de dérivée que vous avez vue au lycée et au S1. L'objectif est de présenter les théorèmes essentiels qui rendent cette notion de dérivée utile.

1 Rappels sur la dérivation

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- On dit que f est **dérivable** en $x_0 \in I$ lorsque la fonction

$$T_{x_0} : x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (x \neq x_0)$$

(appelée **taux d'accroissement de** f **en** x_0) admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

- Lorsque c'est le cas, on note $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} (T_{x_0}(x))$, et ce nombre $f'(x_0)$ est appelé **nombre dérivé de** f **en** x_0.
- La fonction $x \longmapsto f'(x)$ ainsi obtenue, si elle est définie pour tout $x \in I$, est appelée la **dérivée de** f.

Remarque. Géométriquement, $T_{x_0}(x)$ est la pente de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. Si x tend vers x_0, on obtient une famille de droites qui se rapprochent de la tangente à f en x_0 (à condition que la limite existe bien).

Le lemme suivant permettra de faire le lien avec la suite de ce chapitre :

Lemme 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \in \mathbb{R} \iff \exists\, a_0, a_1 \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + h\epsilon(h), \;\; h \in \mathbb{R}, \;\; \lim_{h \to 0}(\epsilon(h)) = 0.$$

De plus, si ces nombres existent, on a $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons f dérivable en x_0. Posons

$$\epsilon(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0),$$

pour $h \neq 0$; et on a $\epsilon(0) = 0$. Par définition, on a bien $\epsilon \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$. On a donc bien $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + h\epsilon(h)$, avec $h \in \mathbb{R}$ et $\lim_{h\to 0}(\epsilon(h)) = 0$. Si on fait tendre h vers 0, on constate que

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)) = \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)) = a_0.$$

On a donc $f(x_0) = a_0$.
Ensuite on calcule

$$T_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a_1 + \epsilon(h),$$

en posant $h = x - x_0$ bien sûr. Ainsi, lorsque $x \to x_0$, ce taux d'accroissement tend vers a_1, ce qui signifie que f est dérivable par définition.

□

Voici maintenant quelques résultats bien connus données à titre de rappels :

Proposition 3

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g dérivables en x_0.

1. La fonction $x \longmapsto f(x) + g(x)$ est dérivable en x_0, et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. la fonction $x \longmapsto f(x)g(x)$ est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Proposition 4

Soient $g : I \longrightarrow J$ dérivable en $x_0 \in I$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $g(x_0) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 et on a la formule

$$(f\circ g)'(x_0) = g'(x_0)f'(g(x_0)).$$

(voir la feuille de TD)

2 Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis (TAF) est aux fonctions dérivables ce que le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) est aux fonctions continues : c'est le résultat qui justifie les définitions.

2.1 Lemme de Rolle

Lemme 5

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que f soit dérivable en c et tel que f atteint un extrémum (maximum ou minimum) en c. Alors $f'(c) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admette un minimum en c, donc $f(x) - f(c) > 0$ pour $x \in [a,b]$, $x \neq c$. Alors

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \text{ pour } x > c.$$

En passant à la limite, on obtient que $f'(c) \geq 0$. En revanche, pour $x < c$, on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Donc par passage à la limite, $f'(c) \leq 0$. Finalement $f'(c) = 0$. On fait de même si c est un maximum. $\square$

Remarque.
1. c doit être différent de a et de b. Par exemple si on prend la fonction $x \longmapsto x$ sur $[0, 1]$, on a un maximum en 1 mais $f'(1) = 1 \neq 0$.
2. La réciproque du lemme est fausse : $f : x \longmapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais on ne peut pas trouver d'intervalle $[a, b]$ tel qu'il existe un extremum c sur $]a, b[$.

Théorème 6 (Lemme de Rolle)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante, n'importe quel $c \in]a, b[$ convient. Sinon, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. (f non constante). Par exemple on peut supposer que $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur $[a, b]$ qui est fermé et borné, elle admet donc un maximum en un point $c \in [a, b]$. Mais $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$, donc $f(c) \neq f(a)$ et $f(c) \neq f(b)$. Ainsi, $c \neq a$ et $c \neq b$. Donc $c \in]a, b[$ et f est dérivable en c, admet un maximum local en c, donc par le lemme précédent $f'(x) = 0$. On procède de même si $f(x_0) < f(a)$. $\square$

2.2 Accroissements finis

Théorème 7 (accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Graphiquement, cela signifie qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite AB, avec A$= (a, f(a))$ et B$= (b, f(b))$.

Démonstration. Posons $l := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g : x \longmapsto f(x) - l(x - a)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a). \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le lemme de Rolle à g : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, $g'(x) = f'(x) - l$, ce qui donne finalement

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Remarque. Le nombre c n'est pas unique en général.

Un corollaire très important est le suivant, que vous utilisez depuis longtemps :

Corollaire 8

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f$ croissante ;
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f$ décroissante ;
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Longleftrightarrow f$ strictement croissante ;
4. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \Longleftrightarrow f$ strictement décroissante ;
5. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f$ constante.

Preuve du premier point. ($\Leftarrow$) déjà vu et facile avec taux d'accroissement et passage à la limite.

($\Rightarrow$) Supposons que pour tout x, $f'(x) \geq 0$. Soient $x, y \in]a,b[$ avec $x \leq y$. Par le TAF, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Mais $f'(c) \geq 0$ donc $f(x) - f(y) \leq 0$, car $x - y \leq 0$. Donc pour tous $x \leq y \in]a,b[$, on a obtenu $f(x) \leq f(y)$, donc f est croissante.

□

Corollaire 9 (Inégalités des accroissements finis, IAF)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, on a alors

$$\forall x, y \in I,\ \ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Démonstration. Par le TAF, on a un c tel que $f'(c)(y-x) = f(y) - f(x)$. Comme $|f'(c)| \leq M$, on a le résultat. □

Exemple : Prenons $f(x) = \sin(x)$. $f'(x) = \cos(x)$, donc $|f'(x)| \leq 1$. Ainsi, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$. En particulier, si $y = 0$, on obtient $|\sin(x)| \leq |x|$.

3 Formules de Taylor

On a vu au lemme 2 que si f est dérivable en x_0, elle s'écrit $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + x\epsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} (\epsilon(x)) = 0$. On a ainsi écrit f comme une "partie polynomiale", fonction affine de x, plus un "reste" qui rend vers zéro. L'objectif des formules de Taylor est de généraliser ceci : si f est n fois dérivable, peut-on écrire

$$f(x) = P_n(x) + \epsilon(x),$$

avec P_n un polynôme de degré n et $\epsilon(x) \to 0$?

3.1 Taylor-Lagrange

Théorème 10 (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit f dérivable n fois sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, il existe $c \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Reformulation : parfois, on dit $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}+\frac{f^{(n)}(x_0+(x-x_0)\theta)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Notations : on appelle la quantité

$$T_{n,f}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)$$

partie principale ou partie polynomiale ; et la quantité

$$R_{n,f}(x) := \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

est appelée reste.

Preuve dans le cas $x_0 = 0$. Supposons $x > 0$, on peut adapter au cas $x < 0$. En posant

$$A = \frac{f(x) - T_{n,f}(x)}{\frac{x^n}{n!}},$$

on a déjà $f(x) = T_{n,f}(x) + \frac{A}{n!}x^n$. Montrons que $A = f^{(n)}(\theta x)$ pour $0 < \theta < 1$. Sur $[0, x]$, on définit

$$F : t \longmapsto f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t) \right) - \frac{A}{n!}(x-t)^n.$$

F est dérivable et $F(0) = F(x) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, x[$ tel que $F'(c) = 0$. En posant $\theta = \frac{c}{x}$, on a bien $0 < \theta < 1$ et $c = \theta x$. Un calcul permet de montrer que

$$F'(t) = \left(A - f^{(n)}(t)\right) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi, l'équation $F'(\theta x) = F'(c) = 0$ donne précisément $A = f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(c)$. $\square$

Exemple : on prend $f = \exp$. On a $f^{(n)} = f \ \forall n \in \mathbb{N}$. En particulier, $f^{(n)}(0) = 1$. Ainsi, il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n.$$

On a ainsi, à x fixé,

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}e^{\theta x}x^n.$$

Comme $|\exp \theta x| \leq \exp |\theta x| \leq \exp |x|$, on déduit que

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On retrouve donc l'égalité bien connue

$$\exp(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right).$$

La méthode utilisée dans cet exemple peut être généralisée :

Corollaire 11

On reprend les hypothèses du théorème. Si on a en plus une majoration $\left|f^{(n)}\right| \leq M \in \mathbb{R}$, alors pour $x, x_0 \in I$, on a

$$|f(x) - T_{n,f}(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

3.2 Taylor-Lagrange avec reste intégral

C'est le même type de formule, mais avec une expression du reste sous la forme d'une intégrale.

Théorème 12 (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral)

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois et $x, x_0 \in I$. Alors

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} dt.$$

Remarque. En posant $h = x - x_0$, la formule s'énonce

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h + \int_0^h \frac{f^{(n)}(x_0 + t)}{(n-1)!}(h - t)^{n-1} dt.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $k \leq n$ en faisant une intégration par parties sur le reste pour l'hérédité. Essayez à titre d'exercice ! $\square$

Exercice 1

Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)...(X - \alpha_n)$ un polynôme à n racines réelles distinctes 2 à 2.

1. Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes.
2. Montrer que $P + P'$ admet $n-1$ racines distinctes. *Indication : utiliser* $f : x \longmapsto P(x)\exp(x)$
3. Déduire que toutes les racines de $P + P'$ sont réelles.

Exercice 2 : (Inégalités)

Établir les inégalités suivantes :

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$;
2. Pour $x \geq 0$: $e^x - 1 \leq xe^x$;
3. Pour $x \in [1, 2]$, on considère $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Montrer que $|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

Exercice 3

Soit f un fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ $\forall x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$ $\forall x \in [0, 1]$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Supposons que pour tout x, $f'(x) < 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$.
Montrer que f ne s'annule jamais.

Exercice 5

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons $g(x) = f(x+1) - f(x)$.
Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$